



بهینه سازی مقدمات

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

ارزیابی

Digital filters [7]–[10]: sophisticated filter banks [7] were designed to recognize QRS complexes in which they analyzed the positions and magnitudes of sharp waves and used a special digital band-pass filter to reduce the false detection of ECG signals in the MIT-BIH database [11]. The difference operation method (DOM) [8] scheme including two stages was proposed: the first stage was to find the point R by applying the difference equation operation to an ECG signal, then the second stage looked for the points Q and S based on the point R to find the QRS complex. The work [9] used some special digital filters to detect and classify ECG signal in time or frequency domain. Slope- and peak-sensitive band-pass filters were employed for the detection [10]. The morphological smoothing further improved its performance.

Wavelet transform (WT) [12]–[16]: the transform yields a time-scale representation similar to the time-frequency representation of the short-time Fourier transform (STFT) [12], while the WT uses a set of analyzing functions that allows a variable time and frequency resolution for different frequency bands [13]. By the multiscale feature of WT, the QRS complex can be distinguished from high P or T waves, noise, and baseline drift. The dyadic discrete WT (DWT) was usually implemented using a dyadic filter bank where the filter coefficients were directly derived from the wavelet function [14]. The WT based on the adaptive threshold [15] and WT based on multi-lead ECG [16] were evaluated on the QT database [17].

Adaptive matched filters [18]–[22]: a two-stage successive cancellation algorithm that sequentially separates

تمرین‌ها

▪ کتبی

▪ عملی

تحقیق و پیاده‌سازی

امتحان

▪ خلق دانش

▪ کپی‌پیست (گرفتن گذاشتن) اعلام منابع هر تمرین

مراجع و منابع

[فلچر] R. Fletcher, "Practical Methods of Optimization," 2nd Ed, 2000.

[نازه دل] J. Nocedal, S. Wright, "Numerical Optimization," Springer, 2nd ed., 2006.

[آنتونیو] A. Antoniou, W. Lu "Practical Optimization- Algorithms and Engineering Applications," Springer, 2007.

[لوئنبرگر] D. Luenberger, Y. Ye, "Linear and Nonlinear Programming," Springer, 4th ed., 2016.

منابع کمکی

[دایزن روٹ] M. Deisenroth, A. Faisal, C. Ong, "Mathematics for Machine Learning," Cambridge University Press, 2019.

[چاپرا] S. Chapra, R. Canale, "Numerical Methods for Engineers," McGraw Hill, 6th ed., 2009.

[جهانشاهلو]

[دانتریگ]

اینترنت و مقالات

[فرهنگستان] واژه‌های مصوب فرهنگستان، دسترسی از طریق مانه

[انوری] ح. انوری و دیگران، «فرهنگ بزرگ سخن»، انتشارات سخن، ۱۳۹۲

[رانکوهی] م.ت. روحانی رانکوهی، «فرهنگ داده»، انتشارات جلوه،

اعلانات

فلچر ۱۹۸۷

- میدان بهینه‌سازی به مثابه
- «ترکیب سحرانگیز نظر و رایانش، مکاشفه و دقت»

اعلانات

حل تمرین: حسین رضائی

نحوه ارسال تمرین‌ها، پروژه‌ها، دیگر موارد

▪ ا-نامه behinesazi.iasbs@gmail.com

▪ عنوان: «بهبینه‌سازی-تمرین سری اول»

▪ فایل متنی: قالب پی‌دی‌اف

▪ نام فایل: [B-T#-Afshar-Mahmoud_Sotode-Morteza.pdf](#)

▪ نام فایل: [B-P#-Afshar-Mahmoud_Sotode-Morteza.pdf](#)

▪ دیگر فایل‌ها

▪ نام فایل: [B-T#-Afshar-Mahmoud_Sotode-Morteza.zip](#)

تمرین بهینه‌سازی با نوشتن کد

فهم الگوریتم

پیچیدگی

حافظه لازم

درخشانی

توانایی بالای برنامه‌نویسی لازم نیست

▪ ولی میزان محاسباتی لازم است.

▪ متلب یا پیتون

بهینه‌سازی در عمل

الگوریتم قوی و کارا

مدل‌سازی مناسب

تفسیر دقیق نتایج

برنامه کاربرپسند

مطالبی که عرضه خواهد شد

مقدمه

مقدمه ریاضی

▪ جبر خطی

▪ حسابان

روش‌های بهینه‌سازی نامقید

روش‌های بهینه‌سازی خطی

روش‌های بهینه‌سازی مقید

روش‌های مکاشفه‌ای

▪ یا در قالب تدریس یا در قالب ارائه مقاله درسی

بهینه سازی

فرایند یافتن «بهترین»

- بیشترین یا بیشینه دخل
- کمترین یا کمینه خرج

بهینه

- به معنای «بیشینه» یا «کمینه»
- اصطلاحی فنی
- اندازه گیری کمی

بهینه سازی

بشر بهینه عمل می کند

- سرمایه گذاران
- سازندگان
- مهندسان

طبیعت بهینه عمل می کند

- سیستم های فیزیکی
- مولکول ها
- اشعه نوری

مهم در تصمیم و تحلیل

حل مسائل بهینه‌سازی

استفاده فراوان در علم و مهندسی و اقتصاد و صنعت

مقاطع مورد استفاده

- مدل‌سازی، تعیین مشخصات، و طراحی ابزارها و مدارها و سیستم‌ها
- طراحی ساختارها و ساختمان‌ها
- کنترل فرایند
- نظریه تخمین، برازش منحنی، حل دستگاه معادلات
- پیش‌بینی، زمان‌بندی تولید، کنترل کیفیت
- نگهداری و تعمیر
- شبکه‌های عصبی و سیستم‌های تطبیقی
- بازارهای مالی

یادگیری توانائی‌ها و محدودیت‌ها منجر به

- فهم بهتر تاثیر آن در حوزه‌های مختلف

ریشه در حساب تغییرات

اویلر و لاگرانژ

معمولا معروف به برنامه‌ریزی ریاضیاتی

▪ دهه بیست شمسی توسعه برنامه‌ریزی خطی

بهینه‌سازی

مسائل واقعی

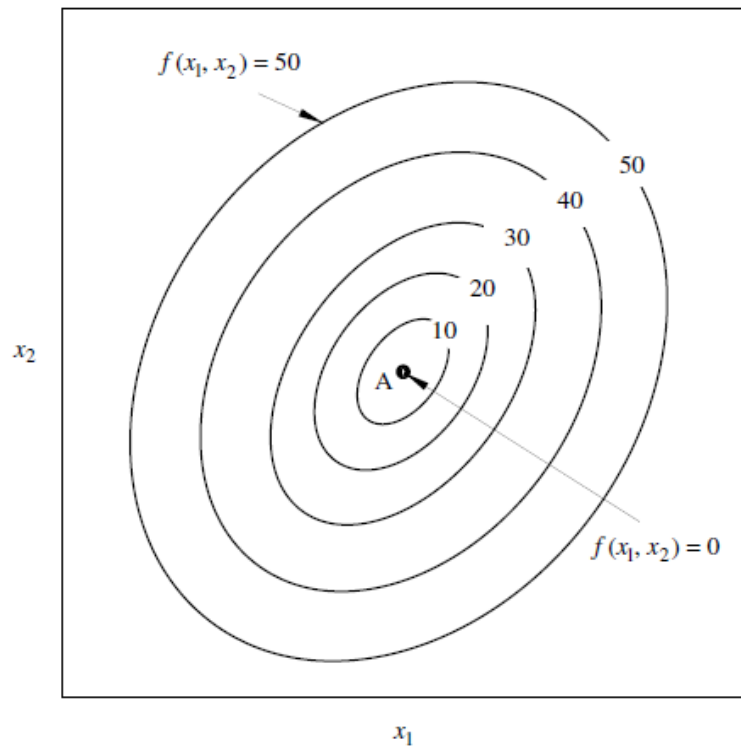
- دارای انواع حل‌ها
- معمولا تعداد بی‌نهایت پاسخ
- بهینه‌سازی با یافتن بهترین پاسخ
- در صورت تک پاسخی بودن
- بهینه‌سازی بی‌معنی

بهینه‌سازی - انواع حل

روش‌های کلی

- روش‌های تحلیلی
- روش‌های گرافیکی
- روش‌های آزمایشی
- روش‌های عددی

بهینه‌سازی - انواع



روش‌های کلی

روش‌های تحلیلی

- مبتنی بر حسابان
- ابتدا توضیح ریاضی مسئله
- عدم نیاز به رایانه
- سخت جهت اعمال بر مسائل سخت غیرخطی و یا متغیرهای فراوان

روش‌های گرافیکی

- رسم تابع
- چند متغیر؟!
- رسم تابع بر اساس تک متغیر مستقل
- ترازبندی: مجموعه نقاط (x_1, x_2) با $f(x_1, x_2)$ برابر
- ناکارآمد یا غیرممکن برای تعداد متغیرهای بیشتر

بهینه‌سازی - انواع

▪ روش‌های آزمایشی

- آزمایش تک به تک متغیرها
- امکان رسیدن به بهینه یا نزدیک-بهینه
- امکان رسیدن به جواب‌های نامطمئن
- چرا؟
- تعامل چند متغیر با یکدیگر و نیاز به آزمایش همزمان آنها

▪ روش‌های عددی

- مهم‌ترین روش عمومی
- استفاده از رویه‌های مرحله به مرحله (تکراری)
- شروع از حدسی اولیه
- پایان با رسیدن به ملاک همگرایی
- مثال؟
- مورد استفاده جهت حل مسائل پیچیده
- حل‌ناپذیر تحلیلی
- برنامه‌پذیری رایانه‌ای راحت
- روش‌های غالب

بهینه‌سازی - انواع

برنامه‌ریزی ریاضیاتی

▪ پارادایم حاکم بر نظر و عمل روش‌های بهینه‌سازی عددی

شامل

▪ برنامه‌ریزی خطی

▪ برنامه‌ریزی عدد صحیح

▪ برنامه‌ریزی غیرخطی

▪ برنامه‌ریزی پویا

بهینه‌سازی - مختصر

جهت استفاده

- نیاز به مشخص کردن مقصود(هدف)
- «اندازه‌گیری کمی کارکرد سیستم تحت مطالعه»
- مثال
 - سود
 - زیان
 - انرژی پتانسیل
- نگاشت به عددی
 - نمایشگر یک کمیت یا ترکیبی از چند کمیت
- هدف وابسته به مشخصه‌های خاص از سیستم
 - متغیرها، مجهول‌ها
- مقصود
 - یافتن مقادیر بهینه‌ساز هدف

بهینه‌سازی - مختصر - ادامه

مقصود

- یافتن مقادیر متغیرها جهت بهینه‌سازی هدف

معمولا دارای حد و حدود

▪ مثال

- مقادیر نامنفی چگالی الکترون در مولکول

- میزان بهره

بهبودسازی - مدل سازی

فرایند مشخص کردن هدف، متغیرها، محدودیت‌های مسئله معرفی شده

قدم اول

- ایجاد مدل مناسب

نمایش ساده شده چیزی حقیقی

- چرا؟

انگیزه‌های مختلف

- کمتر کردن پیچیدگی

- فهم مسئله

- یافتن راحت‌تر حل

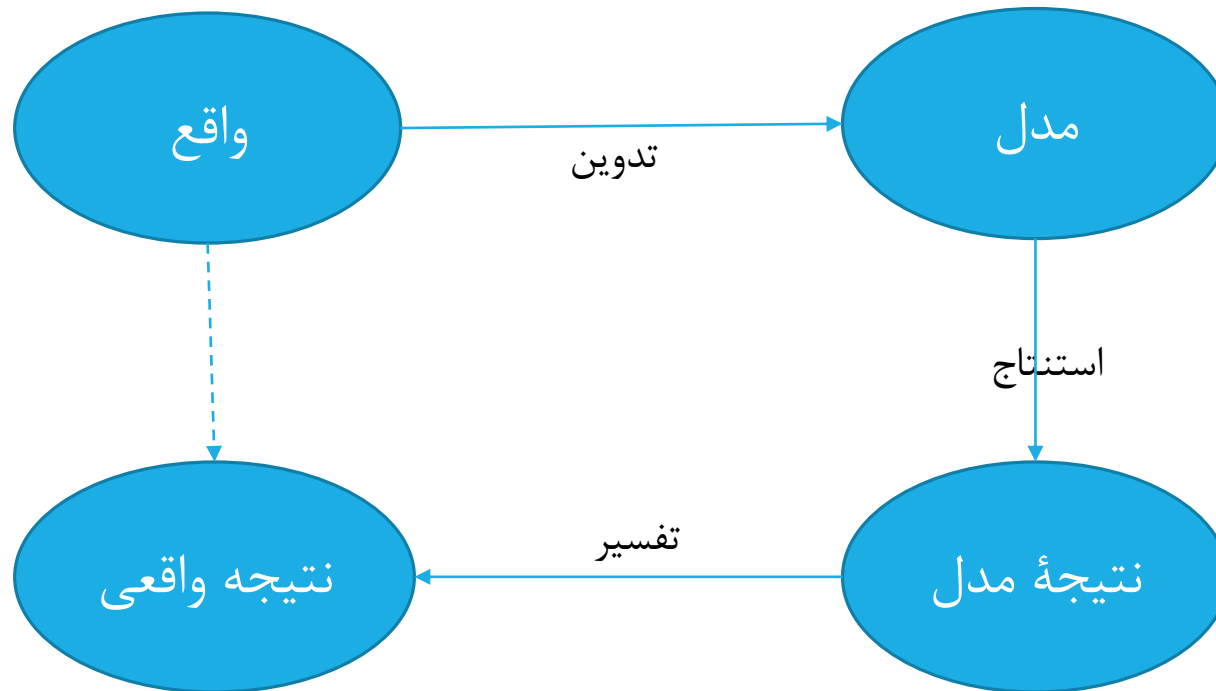
ساده‌انگاری

- عدم نمایش درست مسئله

زیادی سخت

- حل مشکل اگر نه غیرممکن

مدل‌بندی - ادامه



مدل بندی - ادامه

مسئله در محیط واقع

تدوین مدل

- چه جنبه‌هایی در نظر گرفته می‌شود
- چه جنبه‌هایی نادیده گرفته می‌شود
- مفروضات
- نوع مدل

استنتاج

- حل معادلات
- الگوریتم
- منطق

تفسیر

- ترجمه به محیط واقع

بهینه‌سازی - الگوریتم بهینه‌سازی

جهت یافتن راه‌حل

معمولا با رایانه

الگوریتم واحد و جامع؟

- خیر
- قضیه «نبود ناهار مفت»

مجموعه الگوریتم‌ها

سعی بر انطباق الگوریتم با مسئله خاص

انتخاب الگوریتم درست و وظیفه کاربر

تاثیر بر سرعت راه‌حل

- حتی بر یافتن راه‌حل

بهینه‌سازی - شرایط بهینگی

پس از اعمال الگوریتم روی مدل

نیاز به بررسی یافتن درست راه‌حل

وارسی مجموعه مقادیر یافت‌شده متغیرها

اطلاع مفید درباره تخمین فعلی

تحلیل حساسیت

- حساسیت پاسخ به تغییرات در مدل و داده
- با تغییر مدل نیاز به تکرار حل مسئله

تدوین ریاضی

کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی تابع با در نظر گرفتن قیدهایی روی متغیرهای تابع x بردار متغیرها (یا مجهول‌ها، پارامترها)

f تابع هدف، تابعی (عددی) از x که قصد بیشینه یا کمینه کردن آن را داریم

C_i توابع نمایشگر قیدهایی شامل تساوی‌ها و نامساوی‌ها که مقادیر x پاسخ تابع f باید آن‌ها را رعایت کنند

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

با توجه

$$c_i(x) = 0 \quad i \in \mathcal{E}$$

$$c_i(x) \geq 0 \quad i \in \mathcal{I}$$

\mathcal{E} و \mathcal{I} مجموعه اندیس‌های قیدهای تساوی و نامساوی

مثال

با

$$\min ((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2)$$

به طوریکه

$$x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

مثال

$$\min ((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2)$$

به طوریکه

$$x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

بازنویسی شبیه تدوین معرفی شده

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$c(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^2 + x_2 \\ -x_1 - x_2 + 2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I} = \{1, 2\}, \quad \mathcal{E} = \emptyset.$$

مثال - ادامه

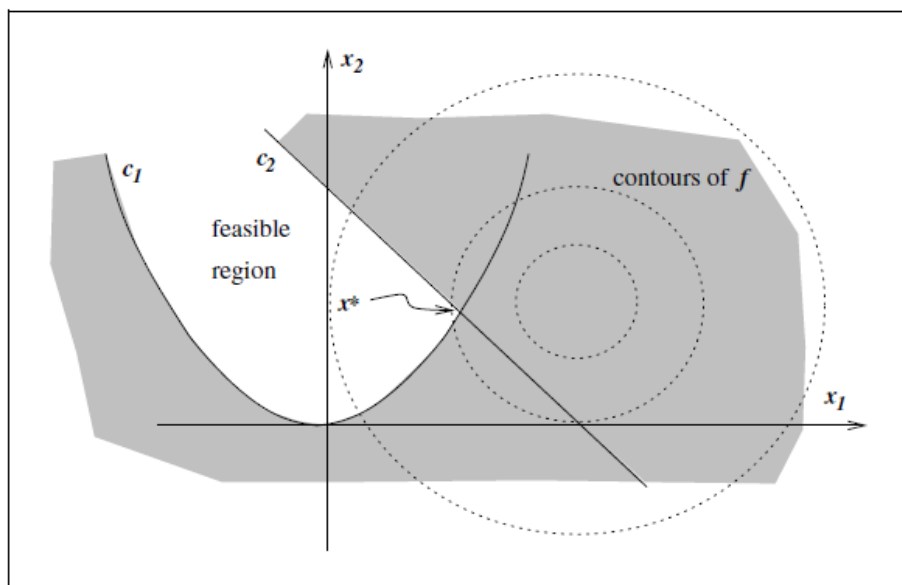
ترازهای تابع هدف

▪ مجموعه نقاطی که $f(x)$ دارای مقدار ثابت

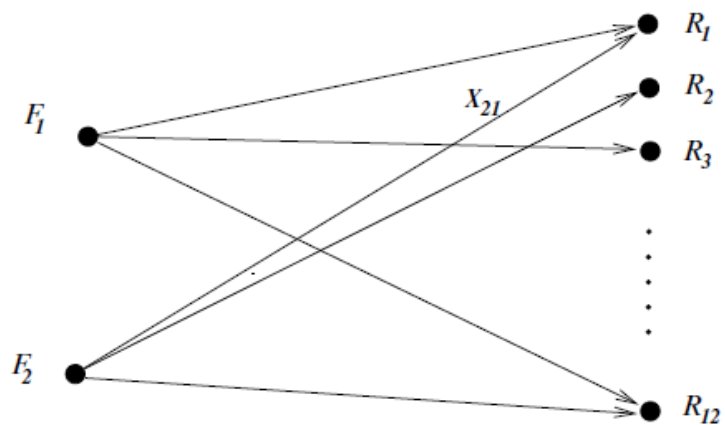
منطقه شدنی (امکان پذیر)

▪ مجموعه نقاطی که تمامی قیدها را رعایت می کند.

x^* حل مسئله



مثال ۲ - مسئله ترابری



شرکتی

▪ دو کارخانه F_1 و F_2

▪ دوازده خرده‌فروشی R_1 تا R_{12}

▪ F_i عرضه a_i تن از محصول در هر هفته
▪ ظرفیت

▪ R_i تقاضای b_i تن از محصول در هر هفته

▪ c_{ij} هزینه ارسال از F_i به R_j

مسئله: یافتن مقادیر انتقال محصول بین کارخانه‌ها و فروشگاه‌ها جهت برآورده‌سازی نیازها و کمینه‌سازی هزینه‌ها

مثال ۲- مسئله ترابری - ادامه

تدوین

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

مثال ۲ - مسئله ترابری - ادامه

تدوین

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

به طوریکه

$$\sum_{j=1}^{12} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^2 x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \dots, 12$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, j = 1, \dots, 12$$

بهینه‌سازی - پیوسته در مقابل گسسته

متغیرها مقادیر صحیح

- تعداد نیروگاه در پنج سال آینده
- نیاز یا عدم‌نیاز به کارخانه‌ای خاص در شهری خاص

برنامه‌ریزی عدد صحیح

- بهینه‌سازی گسسته
- یکی از مهم‌ترین جلوه‌های ناکوژی

گاهی اوقات ترکیب اعداد صحیح و اعداد حقیقی

- برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته (بصا)

بهینه‌سازی پیوسته

- نامتناهی ناشمارا
- حل ساده‌تر
- همواری تابع موجب تصمیم‌گیری ساده‌تر حول نقطه x

بهبینه‌سازی - مقید و نامقید

انواع تقسیم‌بندی‌ها

- طبیعت تابع هدف و قیدها (خطی، غیرخطی، کوژ)
- تعداد متغیرها (کم، زیاد)
- همواری تابع (مشتق‌پذیر یا مشتق‌ناپذیر)

دارای قید محدودیت و بدون محدودیت

بهبینه‌سازی نامقید $E = I = 0$
▪ امکان تبدیل مسائل مقید به نامقید

بهبینه‌سازی مقید

- محدودیت بودجه در اقتصاد
- محدودیت شکل در طراحی
- در اشکال مختلف
 - حد بالا و پائین
 - محدودیت خطی
 - نامساوی‌های غیرخطی

برنامه‌ریزی خطی

- تابع و قیدها توابع خطی
- پر مطلب‌ترین

برنامه‌ریزی غیرخطی

- حداقل یک یا چند قید یا هدف تابع غیرخطی

بهبودسازی - محلی و سراسری

بیشتر به دنبال راه‌حلی محلی

- نقطه‌ای با کوچکترین مقدار تابع هدف از میان نقاط امکان‌پذیر همسایه

- به دنبال راه‌حل سراسری نیست

- نقطه با کمترین مقدار تابع در میان تمامی نقاط امکان‌پذیر

- نیاز به راه‌حل سراسری در بعضی مسائل

- سختی یافتن و مشخص کردن

- برنامه‌ریزی کوژ

- برنامه‌ریزی خطی

- جواب‌های محلی همان جواب‌های سراسری

- مسائل غیرخطی

- پاسخ محلی لزوماً راه‌حل سراسری نیست

بهینه‌سازی - معین و تصادفی

مشخص نبودن کامل مدل در بعضی مسائل

وابستگی به مقادیری نامعلومی در زمان تدوین

- مدل طرح‌های مالی و اقتصادی وابسته به آینده میزان بهره، تقاضای محصول در آینده، قیمت کالای خام در آینده
- عدم قطعیت طبیعی بسیاری از سیستم‌ها

بهتر از «بهترین حدس»

- دستیابی به راه‌حل‌های مفیدتر مدل‌ها با مشارکت دانش افزوده‌ای
- نوشتن چند سناریو و تخمین احتمال هر سناریو
- استفاده بهینه‌سازی تصادفی جهت تخمین «امید» کارکرد مدل

موارد مرتبط

- بهینه‌سازی مقید-شانس: متغیر قیدی را با مقدار مشخصی از احتمال برآورده کند
- بهینه‌سازی استوار: بعضی از قیود باید کاملاً رعایت شوند

مجموعه کوژ

مجموعه کوژ

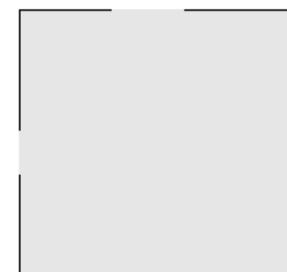
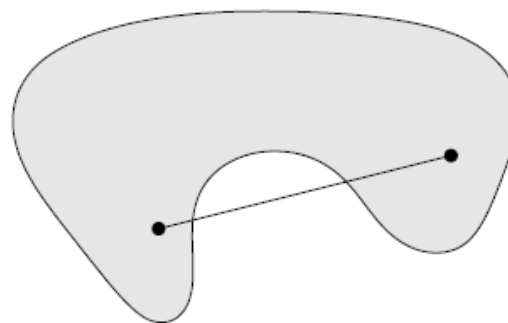
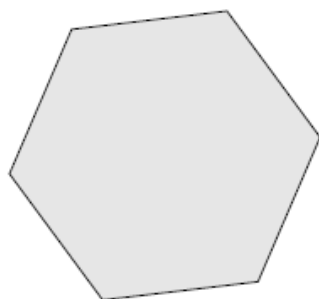
$$S \in \mathbb{R}^n$$

▪ «قطعه» خطی مستقیم واصل دو نقطه از S

▪ کل قطعه خط در S خواهد بود

$$x_1, x_2 \in S \xrightarrow{\forall \theta \in [0,1]} x_\theta = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in S$$

چند نمونه کوژ و ناکوژ



مجموعه کوژ

مجموعه تهی

تک نقطه

تمامی فضای \mathbb{R}^n

خط یا تکه خط

ابرفسحه (معادله خطی) $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$

نیم‌فضا (نامساوی خطی) $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$

کره $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \leq h$

مخروط کوژ

تابع کوژ

تابع کوژ

▪ دامنه S کوژ و

$$x_1, x_2 \in S \Rightarrow f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2), \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

▪ مثال -

▪ توپ کوژ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$

▪ چندضلعی‌های تعریفی با مساوی‌ها و نامساوی‌های خطی $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = b, C\mathbf{x} \leq d\}$

▪ تابع درجه دو کوژ $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T H \mathbf{x}$

▪ تابع اکیدا کوژ: نامساوی اکید با شرط $\theta \in (0, 1), x_1 \neq x_2$

برنامه ریزی کوژ

کوژ بودن تابع هدف

خطی بودن قیدهای مساوی

مقعر بودن قیدهای نامساوی

الگوریتم‌های بهینه‌سازی

تکراری

▪ مرحله به مرحله

آغاز با حدس اولیه متغیرهای x

تولید دنباله‌ای از تخمین‌های بهتر

ادامه تا زمان ختم الگوریتم

تمایز الگوریتم‌ها از یکدیگر

▪ استراتژی حرکت از قدم فعلی به قدم بعدی

▪ اکثراً استفاده از اطلاعات تابع هدف، قیود، [مشتق اول توابع مذکور]، [مشتق دوم توابع مذکور]

الگوریتم‌های بهینه‌سازی - ادامه

انتخاب الگوریتم و همگرایی و سرعت همگرایی

ویژگی‌های الگوریتم مناسب

- استواری
- اجرای مناسب روی گستره وسیعی از مسائل
- کارایی
- عدم نیاز به زمان یا حافظه زیاد جهت محاسبات
- صحت
- یافتن پاسخ با دقت بالا
- بدون حساسیت فراوان به خطا در داده یا گرد کردن

ناسازگاری اهداف

- همگرایی سریع پاسخ مسئله غیرخطی نیاز به حافظه زیاد
- روش استوار، کند
- سبک‌سنگین کردن نقشی اساسی در طراحی

عدم توجه به

بهینه‌سازی شبکه

برنامه‌ریزی عدد صحیح

برنامه‌ریزی تصادفی

برنامه‌ریزی ناهموار

بهینه‌سازی سراسری

تدوین ریاضی

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

با توجه

$$c_i(x) = 0 \quad i \in \mathcal{E}$$

$$c_i(x) \geq 0 \quad i \in \mathcal{I}$$

\mathcal{E} و \mathcal{I} مجموعه اندیس‌های قیدهای تساوی و نامساوی

بهینه‌سازی - انواع

نام	$f(x)$	$c(x)$
بهینه‌سازی نامقید	غیر خطی	-
برنامه‌ریزی خطی	خطی	خطی
برنامه‌ریزی درجه دو	درجه دو	خطی
بهینه‌سازی مقید خطی	غیر خطی	خطی
بهینه‌سازی مقید یا بهینه‌سازی غیر خطی	غیر خطی	غیر خطی

منابع

[نازه دل]

[آنتونیو]

[جهان شاه لو]

[فلچر]

[بوید]